Banque PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques

Durée 2 h 30

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Cette épreuve comporte 5 parties. La partie 4 ne dépend pas des parties 2 et 3. La partie 5 ne dépend pas de ce qui précède (à l'exception éventuellement de la dernière question).

On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N. On pioche de façon équiprobable, successivement et avec remise un jeton. On suppose les tirages indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n le numéro du jeton obtenu au tirage n et l'on pose

$$M_n = \max\left(U_1, \ldots, U_n\right).$$

Partie 1 : Questions de cours (ou presque)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Reconnaître la loi de U_n.
2. Redémontrer la valeur de $\mathbb{E}\left(U_n\right)$ puis de $\mathbb{V}\left(U_n\right)$.

On pose $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.

3. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
4. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{N+1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

   Quelle interprétation peut-on en faire ?

Partie 2 : Probabilités conditionnelles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Exprimer M_{n+1} en fonction de U_{n+1} et M_n.
6. Soit $(i,j) \in [\![1;N]\!]^2$. On admet que $\mathbb{P}\left(M_n = i\right) \neq 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(M_{n+1} = j \mid M_n = i\right) = \mathbb{P}\left(\max\left(i, U_{n+1}\right) = j\right).$$

7. En déduire pour tout $(i,j) \in [\![1;N]\!]^2$, la valeur de $\mathbb{P}\left(M_{n+1} = j \mid M_n = i\right)$.
8. Exprimer l'évènement $(M_n = 1)$ à l'aide des U_k, puis en déduire $\mathbb{P}\left(M_n = 1\right)$.

Partie 3 : Lois des premiers maximums

On suppose dans cette partie que $N = 4$. On pose pour toute la suite du problème

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \begin{bmatrix} \mathbb{P}\left(M_n = 1\right) \\ \mathbb{P}\left(M_n = 2\right) \\ \mathbb{P}\left(M_n = 3\right) \\ \mathbb{P}\left(M_n = 4\right) \end{bmatrix}.$$

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = AX_n$.
10. En déduire la loi de M_2.
11. Calculer la variance de $M_2' = M_2 - 2$.
12. Calculer $\mathbb{P}\left((M_3 = 3) \cap (M_2 = 3)\right)$.
13. Donner sans justifier la loi conjointe de (M_2, M_3).
14. Déterminer les lois marginales du couple (M_2, M_3).
    On détaillera uniquement le calcul de $\mathbb{P}\left(M_3 = 2\right)$.
15. Les variables M_2 et M_3 sont-elles indépendantes ?
16. On pose $M_3' = M_3 - 2$. Calculer la covariance de M_2' et M_3' et comparer votre résultat avec celui de la question précédente.

Partie 4 : Loi du n-ième maximum

On reprend $N \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Pour tout $k \in [\![1;N]\!]$, écrire l'évènement $(M_n \leqslant k)$ en fonction des évènements $(U_i \leqslant k)$, puis calculer $\mathbb{P}(M_n \leqslant k)$.
18. En déduire que pour tout $k \in [\![1;N]\!]$,
$$\mathbb{P}(M_n = k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$
19. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(M_n = k)$ et vérifier la cohérence du résultat.
20. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(M_n)$. Interpréter.

Partie 5 : Diagonalisation

On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, définie pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ par
$$f(P) = a_0 + (a_0 + 2a_1)X + (a_0 + a_1 + 3a_2)X^2 + (a_0 + a_1 + a_2 + 4a_3)X^3.$$
On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. On note $\mathscr{C} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

21. Soit $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$. Montrer que $B = 4A$.
22. L'application f est-elle bijective ?
23. Calculer le rang de $B - 4I_4$.
24. Déterminer $\mathrm{Ker}(B - 4I_4)$. En déduire $\mathrm{Ker}\left(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right)$.

On pose $P_1 = 1 - X$, $P_2 = X - X^2$ et $P_3 = X^2 - X^3$.

25. Calculer $f(P_1)$, $f(P_2)$, $f(P_3)$.
26. Déterminer alors une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

    Cette matrice diagonale est désormais notée D.
27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire B^n. *On explicitera les coefficients de la matrice.*
28. Retrouver alors le résultat de la question 18. lorsque $N = 4$.

    On pourra s'aider de la question 9.